Table des matières

Introduction **3**

1 Généralités sur les fluides **5**

1.1 Qu'est-ce qu'un fluide ? 5

1.1.1 Propriétés des fluides 5

1.1.2 Forces subies par un fluide 7

2 Hydrostatique **12**

2.1 Loi fondamentale de l'hydrostatique 12

2.2 Propriétés de la pression 14

2.3 Applications 15

2.3.1 Les vases communicants 15

2.3.2 Le principe de Pascal 15

2.3.3 La Poussée d'Archimède 15

3 Dynamique des fluides parfaits **17**

3.1 Caractéristiques d'un écoulement 18

3.2 Dynamique des fluides 18

3.2.1 Équation de continuité 18

3.2.2 Équation de Bernoulli 19

1- Cas d'un fluide parfait sans échange d'énergie avec l'extérieur 19

2- Cas d'un fluide parfait avec échange d'énergie avec l'extérieur 21

3.2.3 Applications 22

4 Dynamique des fluides visqueux **24**
4.1 Notion de viscosité - force de frottement 24
4.2 Établissement du coefficient de viscosité 24
4.3 Les différents types d'écoulement - Nombre de Reynolds 25
4.4 L'équation de Bernoulli généralisée 27
4.4.1 Pertes de charges : régulières/singulières 27
perte de charges régulières - régime laminaire 28
perte de charges régulières en régime turbulent 30
perte de charges singulières 31
4.4.2 Généralisation de l'équation de Bernoulli 32

Introduction

Parmi les 3 états de la matière, celui que vous avez jusqu'à présent le plus utilisé est LE SOLIDE. Le domaine de la physique qui permet de décrire la trajectoire, le mouvement d'un système solide est la mécanique classique du solide qui est régi par "le principe fondamental de la dynamique ou loi de Newton". Mais qu'en est-t-il pour les 2 autres états de la matière, les liquides et les gaz, comment caractérise-t-on leur écoulement ? Nous allons voir dans ce cours, que l'on peut, tout comme pour le solide établir des équations caractérisant un fluide au repos ou en mouvement, en tenant compte des différents régimes d'écoulement. Ce domaine constitue, par analogie avec la mécanique clasique, la mécanique des fluides.
En agriculture, cette science est primordiale à plus d'un titre puisqu'elle va intervenir entre autre :

1. en agroéquipements :
   – par exemple dans le machinisme agricole (presse hydraulique, freins hydrolique, élévateur, etc.)
   – ou encore dans les systèmes de pompage (aspirer ou refouler l'eau d'une parcelle : puisage, forage)
2. mais aussi en agriculture :
   – pour l'irrigation d'une parcelle : transfert d'eau dans differentes canalisations,
   – pour le drainage d'une parcelle,
   – pour l'épandage : écoulement de fluides, mesure de débits,
   – pour l'hydrologie : écoulement de l'eau dans les sols,

Ce cours de mécanique des fluides, destiné aux ingénieurs des techniques agricoles, s'intéresse plus particulièrement à l'étude des liquides, soit l'hydraulique. Par ailleurs, nous restreindrons ce cours (i) à l'étude des fluides **incompressibles**, (ii) à l'écoulement

des fluides en régime permanent.
Historiquement, cette science a été abordée de deux façons différentes : une analyse purement mathématique et une approche expérimentale conduisant à de nombreuses lois empiriques. Actuellement la distinction entre ces deux voies d'étude temps à disparaître, l'une permettant de vérifier ou d'infirmer l'autre.
C'est pour cette raison que dans le cadre de ce cours, nous ferons appel simultannément à des notions mathématiques théoriques et aussi à des résultats expérimentaux.

Dans **une première partie**, plutôt théorique, nous allons definir les bases de la mécanique des fluides. Le **premier chapitre** sera consacré aux notions de base : définitions et propriétés d'un fluide parfait, réel ou visqueux ainsi que les différentes forces qu'il subit.
Puis, l'étude d'un fluide au repos avec l'établissement de la loi fondamentale de l'hydrostatique seront présentés au **chapitre 2**. Des applications (poussée d'archimède, théorème de Pascal...) y seront également étudiées.
Ensuite, l'étude de la dynamique des fluides parfaits est abordée dans le **chapitre 3** avec la caractérisation d'un écoulement ainsi que l'établissement du théorème de Bernoulli. Enfin, dans le **chapitre 4**, le cas des fluides visqueux est étudié. Les frottements sont interprétés comme des pertes de charges et sont pris en compte dans l'équation de Bernoulli.
La **deuxième partie** de ce cours, est plus expérimentale puisqu'elle traite des techniques agricoles utilisant la science de l'hydraulique. Ces applications sont très nombreuses au sein d'une exploitation agricole. En particulier, l'hydraulique souterraine est abordée aux **chapitre 5 et 6**, le drainage au **chapitre 7**, le pompage en agriculture au **chapitre 8**, et pour finir l'irrigation d'une parcelle est exposée au **chapitre 9**.

Chapitre 1

Généralités sur les fluides

1.1 Qu'est-ce qu'un fluide ?

Fluide : Ce terme général regroupe deux des trois états de la matière : les liquides et les gaz. La caractéristique principale d'un fluide est qu'il n'a pas de forme propre prenant celle du récipient qui l'englobe. Cependant, il peut s'écouler plus ou moins bien d'un récipient à l'autre, c'est pourquoi au cours de cet écoulement des forces de frottements (ou **viscosité**) peuvent apparaître. Ainsi donc, tout fluide **réel** a une **viscosité** ; cette notion sera abordée au **chapitre 4**. Par opposition au fluide réel, un fluide est dit **parfait** s'il n'a pas de viscosité : il n'offre aucune résistance interne à un changement de forme.

1.1.1 Propriétés des fluides

mase volumique - densité

Tout fluide se caractérise par sa masse volumique (ou masse spécifique) $\rho = \frac{m}{V}$. ρ s'exprime en Kg/m^3 en unité S.I.. De même on peut définir un poids spécifique $\varpi = \rho * g$ qui s'exprime en N/m^3. On peut également définir la masse volumique par rapport à une référence (en général l'eau), on parle ainsi de densité $d = \frac{\rho_{fluide}}{\rho_{eau}}$. La densité est alors un nombre sans dimension.

Ordre de grandeur de la masse volumique de quelques fluides à T = 20C et sous 1 atmosphère :

$$\left\| \begin{array}{l} \rho_{eau}^{liquide} = 10^3 \text{ Kg/m}^3 \quad \text{Le standard liquide} \\ \rho_{mercure} = 13.4\ 10^3 \text{ Kg/m}^3 \\ \rho_{huile} = 914 \text{ Kg/m}^3 \\ \rho_{lait} = 1030 \text{ Kg/m}^3 \\ \rho_{sang} = 1060 \text{ Kg/m}^3 \\ \\ \rho_{air} = 1.2 \text{ Kg/m}^3 \quad \text{Le standard gazeux} \\ \rho_{He} = 0.18 \text{ Kg/m}^3 \end{array} \right.$$

Remarque 1 : $\rho_{gaz} << \rho_{liquide}$
Remarque 2 : La masse volumique ρ dépend de la température et de la pression
Question : A votre avis, la masse volumique de la glace est-elle plus grande, plus petite ou égale à celle de l'eau liquide ? Justifer.

compressibilité

La propriété physique principale qui permet de faire la distinction entre les liquides et les gaz est la compressibilité (χ), c'est-à-dire sa résistance à une variation de volume. Pour les liquides et les solides, on définit ce coefficient de compressibilité isotherme (exprimé en Pa^{-1}) tel que :

$$\boxed{\chi = -\ \frac{(\Delta V/V)}{\Delta P}}$$

Ordre de grandeur de la compressibilité χ pour quelques liquides :
À partir de l'équation ci-dessus, et en supposant la compressibilité indépendante de la pression, on peut tirer la relation suivante :

$$P_2 - P_1 \ = \ \frac{1}{\chi}\ ln\ \frac{V_1}{V_2}$$

Compressibilité (Pa^{-1})	masse volumique (Kg/m^3)
$\chi_{Hg} = 4.1\ 10^{-10}$ $\chi_{eau} = 4.4\ 10^{-10}$	$\rho_{Hg} = 13400$ $\rho_{eau} = 1000$

Question : Calculer la pression qu'il faut exercer sur un liquide tel que l'eau pour observer une variation de volume de $\frac{1}{1000}$.
Rep : $\Delta P = 22.7$ *atm. Ce résultat explique pourquoi souvent on considère l'eau comme incompressible.*

Pour les gaz, l'équation d'état des gaz conduit à $\chi = \frac{1}{P}$. L'ordre de grandeur de la compréssibilité pour les gaz est $\chi \sim 10^{-5}$ Pa^{-1}.

En conclusion $\chi_{liquide} << \chi_{gaz}$ d'où la faible compressibilité des liquides par rapport aux gaz. Ainsi la compressibilité est la propriété du fluide qui permet de distinguer le liquide du gaz.

1.1.2 Forces subies par un fluide

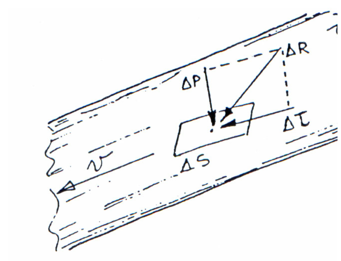
Si on analyse les forces subies par la matière, on est amené à faire la distinction entre trois types de forces : les forces volumiques, les forces surfaciques et les forces linéïques (ou force dite 'de tension superficielle'). Ces dernières n'interviennent que dans le cas des fluides.

Forces volumiques

Ces forces à longue portée s'exercent sur chaque élément de matière de volume dV. Nous aurons toujours à faire au seul champ de pesenteur et dans ce cas, on peut écrire que la variation de ces forces agissant sur un petit volume dV est : $\overrightarrow{dF} = \rho\ \vec{g}\ dV$.
remarque : autres exemples de forces volumiques : les forces électromagnétiques, forces fictives (accélération centrifuge dans un référentiel non galiléen).

Forces surfaciques

Ces forces à courte portéedécroissent rapidement avec l'éloignement des objets inter-agissant. Ces forces sont produites par l'action d'une couche de molécules sur une couche voisine.



Dans le cas général, la force surfacique ΔR appliquée à la surface ΔS n'est pas toujours perpendiculaire à celle-ci, surtout lorsqu'il s'agit d'un fluide réel en mouvement.
Cette force possède 2 composantes, l'une tangente à ΔS qui est la force de frottements ou perte de charge (Cf. **chapitre 4**), l'autre normale à ΔS que l'on nomme force pressante.

- *force de frottements*

Cette force tangentielle $\Delta\tau$, appelée viscosité pour les fluides, trouve son origine dans la résistance d'un fluide à sa déformation (glissement relatif de ses couches). Ainsi puisqu'elle matérialise l'imperfection des fluides, elle n'existe pas dans les fluides dits "parfaits" (sans rugosité).
remarque : Les frottements ne peuvent avoir lieu que dans les fluides (et plus particulièrement les liquides) en mouvement. Il est à noter que dans le cas des solides, il existe au repos des frottements dits frottements statiques. Le travail des forces de frottements correspond à une perte d'énergie (ou perte de charge) qui est dissipée sous forme de chaleur. Ce phénomène de viscosité (origine et conséquences) fait l'objet du **chapitre 4**.

- *la pression*

L'expérience montre qu'un fluide exerce une force de pression sur la paroi du récipient qui le contient. Cette force pressante est toujours normale aux parois.
Dans un fluide en équilibre statique, il y a équilibre entre les forces de volume et les forces normales de surface.

Soit dS, un élément de la surface S qui est soumis à une force pressante $\overrightarrow{dF}$, on définit la pression exercée par un fluide sur cette paroi par :

$$\overrightarrow{dF} = -P\ dS\ \vec{n} \ \ soit\ P = \frac{dF}{dS}$$

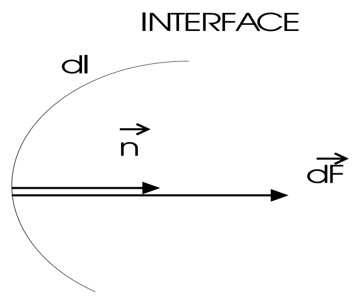
<u>Unité</u> : la pression s'exprime en pascal.
Autres unités rencontrées pour la pression : 1.03 bar = 1.03 10^5 Pa = 1atm = 760 torr

Question : Démontrer que dans le système SI, le pascal équivaut à des $ML^{-1}T^{-2}$.

remarque 1 : Origine microscopique de la pression pour les gaz
L'origine de la pression exercée par un fluide sur une surface donnée est liée aux mouvements microscopiques des molécules de ce fluide et plus précisement aux chocs sur cette surface. La théorie cinétique des gaz permet de montrer qu'il existe une relation entre la pression, P, et l'énergie cinétique moyenne, $<E_c>$, des particules constituant ce gaz : $P=\frac{2}{3}\ N <E_c>$ où N est le nombre de particules de gaz.
remarque 2 : Dans le cas de la matière solide, on retrouve cette force surfacique (frottements rugueux), nommée $\overrightarrow{R}$, et qui représente par exemple la réaction du sol sur un objet solide

Forces de tension superficielle

De nombreuses observations montrent que la surface d'un liquide se comporte comme une membrane élastique tendue et c'est cette énergie, nommée tension superficielle, qui maintient l'élasticité de cette surface. Par exemple, elle tend à donner aux bulles de savon leur surface sphérique. Il existe donc une force de cohésion (par unité de longueur), s'exerçant dans le plan de la surface libre liquide, qui est normale à la paroi qui la limite et qui agit sur une courbe tracée (Cf. figure) à l'interface d'un fluide (sur une interface air - liquide par exemple, sur le ménisque d'un tube capillaire). Cette force, qui tend à minimiser la surface libre du fluide, est définie comme suit :



$$\vec{F} = \gamma \; dl \; \vec{n}$$

où γ est la tension superficielle du liquide. Elle s'exprime en $N.m^{-1}$.

Ordre de grandeur de la tension superficielle :

liquides :	ether	eau (20^0C)	eau (60^0C)	mercure
$\gamma \; 10^3$ (N/m)	17	73	60	480

La tension superficielle va dépendre de la nature des deux phases en contact. Elle dépend également de la température (Cf. l'eau) et elle diminue quand la température augmente. Il est également possible d'abaisser la valeur de la tension surperficielle par l'utilisation de produits tensio-actifs (ou détergent). Ces produits, utilisées en chimie du lavage, vont en fait augmenter la surface libre de contact entre les 2 interfaces entre l'eau et les impuretés, permetant une meilleure adhésion à celle-ci. On dit On parle souvent du pouvoir mouillant important de ces tensio-actifs.
Exemple : expérience de brins de laine (ou du poivre) flottant en surface d'eau et coulant en présence de liquide vaisselle.
remarque 1 : D'un point de vue conceptuel, l'expression de cette force de tension est mathématiquement construite comme celle d'une force de tension d'un ressort ($\overrightarrow{dF}$=k.$\overrightarrow{dx}$, où k est la constante de raideur du ressort).

L'existence d'une tension superficielle à l'interface entre deux phases, provoque une variation de pression (loi de Laplace).

Conséquence 1 : Une des conséquences de cette force de tension superficielle est l'apparition d'une surpression au sein d'une surface libre sphérique. La variation de pression entre l'intérieur et l'extérieur de cette surface peut être exprimée en fonction de la tension superficielle γ de cette interface.

$$\Delta P = 2\gamma\ /R$$

Cette relation est la Loi de Laplace.

Dans le cas d'une bulle de savon, il y a 2 interface à franchir (air/eau puis eau/air). On démontre alors que la loi de Laplace s'écrit :

$$\Delta P = 4\gamma\ /R$$

Conséquence 2 : Ascencion capillaire, loi de Jurin

La variation de pression à l'interphace de 2 phases est également à l'origine est à l'origine de la remontée de l'eau dans des tubes de faible diamètre (tubes capillaires) que l'on appelle ascension capillaire. Comme on le verra dans les prochains chapitres, la capillarité se manifeste, également, lors de l'écoulement de l'eau au sein d'un milieu poreux (loi de Darcy) ou dans des conduits dits capillaires (loi de Poiseuille).

On peut ainsi démonstrer que la colonne de liquide hauteur h dans un tube est :

$$h = 2\gamma\ cos\theta/(\rho g r)$$

où θ est l'angle de contact entre l'interface eau/verre et r le rayon du ménisque.

Dans le cas de certains fluides peu mouillants, comme le mercure, on observe non pas une ascension mais une dépression par capillarité : h est négatif.

Chapitre 2

Hydrostatique

2.1 Loi fondamentale de l'hydrostatique

Considérons un élément parallélépipédique de fluide, de masse volumique ρ, au repos soumis à une force volumique de pesanteur. cet élément (Figure 2.1) est soumis à 2 forces qui s'équilibre parfaitement. Il subit son propre poids mais aussi une force pressante qui s'exerce sur chacune de ses surfaces.
Le principe fondamental de la dynamique permet d'écrire :

$$\Sigma \overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_{poids}} = \vec{0}$$

En projettant sur l'axe 0z on obtient :

$$F_1 - F_2 - \rho\, g\, dV = 0$$

$$P\, S - (P + dP)\, S - \rho\, g\, dV = 0$$

$$\int_1^2 -\, dP = \int_1^2 \rho\, g\, dz$$

remarque 1 : Dans un champ de pesanteur, la pression ne dépend que d'une seule coordonnée, celle de l'altitude.
A de faible altitude on peut supposer g comme constant. Dans le cas des liquides incompressibles, la masse volumique est également considérée comme constante. Ainsi, l'intégration selon l'axe z se simplifie et on obtient :

$$\boxed{\text{P}_1 = \text{P}_2 + \rho \text{ g h} \quad \text{avec} \quad \text{h} = \text{z}_2 - \text{z}_1}$$

remarque 1 : Au sein d'un même liquide, la quantité $P_1 + z\varpi$ est constante. Ainsi lorsque l'on passe d'un point à un autre, si la pression augmente alors la quantité $z\varpi$ diminue et vice versa. D'un point de vue énergétique, cette équation peut se mettre sous la forme : P V + ϖ V z = C^{ste}. Dans ce cas,

– la quantité z V ϖ représente l'énergie potentielle de position de l'élément de volume, dV, situé à l'altitude z.
– et la quantité P V serait également une énergie : l'énergie potentielle de pression.

remarque 3 : On trouve souvent dans la littérature une formule plus générale, où le champ de pression varie selon les 3 coordonnées. Dans ce cas la relation entre la pression P et le champ de pesanteur devient :

$$\overrightarrow{grad}\, P \;=\; \rho\, \vec{g}$$

ATTENTION. Dans le cas de fluides compressibles (tels que les gaz), la masse volumique n'est plus constante ! Dans le cas d'une couche atmosphèrique isotherme et en considérant le gaz comme parfait, on peut montrer que la pression décroît de façon exponentielle avec l'altitude.

$$P \;=\; P_0\, exp\, (-\frac{Mg}{kT}\; z)$$

Ce modèle simplificateur donne une approche de ce qui se passe réellement, puisque l'atmosphère est constitué non pas d'une seule couche isotherme mais de plusieurs couches de différentes température ! Pour représenter au mieux notre atmosphère terrestre, il faudrait, dans ce cas, ajouter à ce modèle la condition 'adiabatique (isentropique)' en utilisant la relation $PV^{\gamma} = C^{ste}$.

Appareil de mesures : L'altitude se mesure au moyen d'un altimètre. Il permet de déterminer son altidude. Son fonctionnement est basé en fait sur le principe du baromètre. Il indique les variations d'altitude instantanément en mesurant en fait les variations de pression atmosphérique. Lorsque vous vous déplacez : une lecture de la différence entre altitude donnée par l'altimètre et la réalité vous permet d'apprécier la tendance météo. Si la lecture de l'altitude (sur l'altimètre) est plus élevée que la réalité, alors la pression a baissé, le mauvais temps approche. Si la lecture de l'altitude est plus basse que la réalité, la pression a augmenté, le beau temps s'approche !.

2.2 Propriétés de la pression

1. La pression est la même en tous points d'un même plan horizontal $\Rightarrow$ les plans horizontaux sont donc des surfaces isobares $(\mathrm{P}_A) = (\mathrm{P}_B) = (\mathrm{P}_C)$ (Figure 2.2).
2. À l'interface horizontale de deux fluides, la pression est la même.
   Au point A, on a : $\mathrm{P}_{air} = \mathrm{P}_{eau}$.
3. En un point donné, la pression ne dépend pas de la direction : $\mathrm{P}_x = \mathrm{P}_y = \mathrm{P}_z$
4. la pression du vide est nulle par définition.

Unité : L'unité en Système International de la pression est le Pascal. On trouve également l'atmosphère avec $1\mathrm{atm} = 10^5\mathrm{Pa}$.

remarque 4 : Les appareils tels que les baromètres mesure une pression absolue c'est-à-dire la pression du fluide est mesurée à partir de la pression du vide, prise comme référence.
Les manomètres, quant à eux, mesurent une pression relative, prise à partir de la pression atmosphérique, pression de référence.

2.3 Applications

2.3.1 Les vases communicants

Quelque soit la forme du récipient (Figure 2.3), on peut se rendre compte que la hauteur est la même dans tous les tubes : $h_1 = h_2 = h_3$. La relation $\Delta P = \rho \Delta h$ ne fait pas intervenir la section du récipient, ni le volume de liquide ; ceci constitue le paradoxe hydrostatique
question : Dans ce paradoxe, soient 3 récipients dont les fonds sont des plateaux de 3 balances contre-balancés par des poids identiques. On ajoute du liquide aux 3 récipients, quel est le fond qui cèdera le premier si le volume de liquide versé dans chaque récipient est le même ?

2.3.2 Le principe de Pascal

"Un liquide incompressible en équilibre transmet intégralement en chacun de ses points ces variations de pression."
Dans la figure 2.4, le liquide incompressible est fermé à ses extrémités par 2 pistons, un de grande section S et l'autre de petite section s. Si on applique une force, f, sur le piston de petite surface en A, la pression est : $P = P_A = \frac{f}{s}$ et d'après le principe de Pascal, $P = P_A = P_B$. Sachant qu'au point B on a la relation $P_B = \frac{F}{S}$, on en déduit ainsi :

$$\frac{f}{s} = \frac{F}{S}$$

Les applications de ce principe sont nombreuses en machinisme agricole, en particulier tout ce qui concerne les organes de transmission (presse hydraulique, frein hydraulique, vérin hydraulique).

2.3.3 La Poussée d'Archimède

Tout corps plongé dans un fluide reçoît de la part de celui-ci une poussée verticale de bas en haut (Figure 2.5), égale au poids du volume de fluide déplacé.

$$\Sigma \overrightarrow{F}_{poussée} = \Sigma \overrightarrow{F}_{verticale}$$

remarque : La poussée exercée par un liquide sur un corps immergé :

$$\boxed{F_{poussée} = - F_1 + F_2 = \rho_{fluide}\ g\ V_{solide}^{immergé}}$$

1. ne comporte pas de composante horizontale,
2. est une force verticale directement opposée au poids du fluide contenu à l'intérieur du volume occupé par le corps,
3. est appliquée au centre de poussée qui est le centre de gravité du volume de fluide équivalent au volume immergé du corps.

question : Un glaçon flotte à la surface d'un verre d'eau. Lorsqu'il est entièrement fondu, le niveau de l'eau a-t-il monté, descendu ou est-il resté le même ?

Chapitre 3

Dynamique des fluides parfaits

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser aux fluides en mouvement tout en se limitant aux fluides parfaits (sans viscosité c'est-à-dire sans frottements). Suivant leur vitesse (faible ou rapide), on distingue 2 régimes d'écoulement :

- le régime permanent (ou stationnaire). Dans ce cas, les grandeurs physiques (par exemple : la masse volumique, la vitesse, pression..) ont une valeur constante au cours du temps et ne sont fonction que des coordonnées spatiales (x, y, z). Dans ce cas, le fluide a une masse volumique incompressible ($\frac{\partial \rho}{\partial t}$ =0) et se déplace à vitesse constante.
  Ex : $v = f(x, y, z)$ et
  $$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0$$
  $$\overrightarrow{v}(x, t) = \overrightarrow{v}(x, t_0) \qquad \forall t, \forall \overrightarrow{x}$$
- le régime non permanent. Dans ce cas, les grandeurs physiques dépendent non seulement des coordonnées spatiales mais aussi temporelles. (Ex : $v = f(x, y, z, t)$).

Dans ce cours, nous nous limiterons uniquement au cas d'un **régime permanent**, cas le plus simple à étudier.

3.1 Caractéristiques d'un écoulement

-Ligne de courant : C'est la trajectoire (Figure 3.1) suivie par une particule de fluide de vitesse $\overrightarrow{v}$. Elle est tangente en chacun de ses points au vecteur vitesse du fluide de ce point.
Dans un écoulement laminaire, les lignes de courant ne se coupent jamais alors que pour un écoulement turbulent, les vecteurs vitesses ont des directions différentes.

-Tube de courant : Un ensemble de lignes de courant constitue un tube de courant.
Exemple : Un filet d'eau d'un robinet constitue un tube de courant.

-Débit : C'est la quantité de fluide qui a traversé une section de conduite pendant le temps Δt. On peut ainsi définir :

– une vitesse moyenne : on définit en général, $\bar{v}$ (ou v_m), la vitesse moyenne de déplacement du fluide dans une conduite avec $\bar{v} = \frac{q_V}{S}$
– un débit volumique $q_V = \frac{\Delta V}{\Delta t}$ en m^3/s avec $dq_V = \bar{v}.dS$.

$$\boxed{q_V = \int dq = \int \bar{v}.dS}$$

– un débit massique $q_m = \frac{\Delta m}{\Delta t}$ en Kg/s avec $dq_m = \frac{\varpi}{g}\ \bar{v}\ dS$

3.2 Dynamique des fluides

3.2.1 Équation de continuité

En un régime stationnaire ($\Rightarrow$ fluide incompressible), la conservation de la matière au cours du temps à travers les sections d'un tube de courant impose également la conservation du débit :

$$\frac{\Delta m_1}{\Delta t} = \frac{\Delta m_2}{\Delta t}$$

$$\rho\frac{\Delta V_1}{\Delta t} \ + \ V_1 \ \frac{\Delta \rho}{\Delta t} = \ \rho S_1\frac{\Delta l_1}{\Delta t} = \rho S_1\bar{v_1} \ = \ \rho S_2\bar{v_2}$$

$$\boxed{S_1 \ \bar{v_1} = S_2 \ \bar{v_2} = \text{cste}}$$

remarque 2 : L'équation de continuité montre que pour un fluide incompressible, la vitesse du fluide augmente si la section du tube diminue (figure 3.3).
remarque 3 : Analogie électrique : On peut montrer que le débit volumique q_V se comporte comme une intensité électrique, qui n'est autre qu'un débit de charge avec i = $\frac{dq}{dt}$ où q est la charge élémentaire. Donc l'équation de continuité en mécanique des fluides correspond la première loi de Kirchoff (ou loi des noeuds) en électricité (Figure 3.2).
Question : La section de l'aorte chez une personne normale au repos est de 3 cm^2 et la vitesse du sang y est de v_a = 30 cm/s. Un capillaire type a une section d'environ 3 x 10^7 cm^2 et le sang y circule avec une vitesse de v_c = 0.05 cm/s. Combien de capillaires cette personnes a-t-elle ?

3.2.2 Équation de Bernoulli

1- Cas d'un fluide parfait sans échange d'énergie avec l'extérieur

Considérons le tube de courant de la Figure 3.4 qui s'appuie sur les sections 1, 2 d'aires respectives S_1, S_2 à l'instant t. Soient $\overrightarrow{v_1}$ et P_1 la vitesse et la pression dans la section 1 et $\overrightarrow{v_2}$, P_2 la vitesse et la pression dans la section 2.
Au temps (t+dt), les sections 1 et 2 sont venues en 1' et 2'.

La conservation de l'énergie cinétique nous dit :

$$\Delta E_c \ = \ \Sigma W_{\overrightarrow{F}_{exterieures}} \ = \ W_{Poids} \ + \ W^1_{F_{pression}} \ + \ W^2_{F_{pression}}$$

$$W_{Poids} \ = \ \int \vec{P}\vec{dl} \ = \ \int_1^2 m \ g \ dz \ = \ -m \ g \ (z_2 - z_1)$$

$$W^1_{F_{pression}} = \int P \, \overrightarrow{dS} \, \overrightarrow{dl} = P_1 S_1 \, \Delta l_1$$
$$W^2_{F_{pression}} = \int P \, \overrightarrow{dS} \, \overrightarrow{dl} = -P_2 S_2 \, \Delta l_2$$

De plus, la conservation de la masse permet d'écrire :

$$\Delta \mathrm{m}_1 = \Delta \mathrm{m}_2 \text{ soit } \mathrm{S}_1 \Delta l_1 = \mathrm{S}_2 \Delta l_2$$

La ré-écriture du théorème de l'énergie cinétique nous donne :

$$\frac{1}{2} \rho \, S_1 \, \Delta l_1 \, (v_2^2 - v_1^2) = P_1 \, S_1 \, \Delta l_1 - P_2 \, S_1 \, \Delta l_1 - \rho \, \Delta l_1 \, S_1 \, g \, (z_2 - z_1)$$

En divisant par le terme $\mathrm{S}_1 \Delta l_1$ on obtient la relation suivante :

$$\mathrm{P}_2 + \rho \text{ g } \mathrm{z}_2 + \tfrac{1}{2} \rho \mathrm{v}_2^2 = \mathrm{P}_1 + \rho \text{ g } \mathrm{z}_1 + \tfrac{1}{2} \rho \mathrm{v}_1^2$$

D'où l'équation de Bernoulli

$$\boxed{\mathrm{P} + \rho \text{ g z} + \tfrac{1}{2} \, \rho \, \mathrm{v}^2 = \mathrm{Cste}}$$

avec P : pression statique ; ρ g z (ou ϖz) : pression de pesanteur ; $\frac{1}{2} \rho \mathrm{v}^2$: pression cinétique

En faisant apparaître le terme de poids spécifique ϖ, l'équation devient alors :

$$\mathrm{z} + \frac{P_1}{\varpi} + \frac{v^2}{2 \, g} = \mathrm{Cste}$$

avec z = hauteur ou position ; $\frac{P}{\varpi}$ = hauteur piézométrique ; $\frac{v^2}{2 \, g}$ = hauteur dynamique.

P.S. : Pour un fluide au repos ou se déplaçant à vitesse constante, nous retrouvons l'équation fondamentale de l'hydrostatique.

remarque 1 : Attention, lorsque le fluide devient réel, c'est-à-dire qu'il a une viscosité, il faut dans ce cas tenir compte :

– de l'irrégularité des vitesses dans la section étudiée,

– des pertes d'énergie provoquées par les frottements visqueux (voir **chapitre 4**).

Question : Soit un fluide parfait s' écoulant dans une canalisation cylindrique. Montrer que le rétrécissement de cette canalisation s'accompagne d'une dépression. (On considérera une particule de fluide restant à la meme altitude z).

remarque 2 : Analogie mécanique (Figure 3.5)
En mécanique classique, il y a, pour un système isolé, conservation de l'énergie mécanique avec $E_{méca} = E_{cin} + E_{pot} = C^{ste}$. On retrouve également cette conservation de l'énergie en mécanique des fluides :

$$E_{méca} = [\frac{m}{\rho} P + m g z] + \frac{1}{2} m v^2$$
$$E_{méca} = E_{pot} + E_{cin} = Cste$$

On a, ainsi 3 formes d'énergie : énergie de position, de pression et de mouvement. Au cours du déplacement d'un liquide parfait, une forme d'énergie peut se transformer en une autre mais à condition que la somme reste toujours constante.

Exemples d'application de Bernoulli :

Le carburateur - Figure 3.6 : c'est un conduit destiné à assurer l'aspiration de l'essence par un courant d'air. Ce courant est aspiré par le moteur, le rétrécissement provoque une augmentation de la vitesse et donc une chute de pression qui est à l'origine de l'évaporation de l'essence.
Aile d'avion - Figure 3.7 : La forme non symmetrique des ailes d'avion n'est pas un hasard ! Elle provoque une dépression sous l'aile et de cette variation de pression naît une force dite "portance" qui soutient l'avion permettant ainsi des économies d'essence.

2- Cas d'un fluide parfait avec échange d'énergie avec l'extérieur

Si le fluide traverse un système quelconque (par ex. une machine hydraulique type pompe) alors il échange de l'énergie sour forme d'un travail ΔW pendant une durée Δt. La puissance échangée est donc : $\wp = \frac{\Delta W}{\Delta t}$ (Unité le Watt)
L'énergie est reçue par le fluide (ex. pompe) si $\wp > 0$ et l'énergie est cédée par le fluide (ex. turbine) lorsque $\wp < 0$. Dans ce cas, l'équation de Bernoulli devient :

$$\boxed{P + \rho\, g\, z + \frac{1}{2}\, \rho\, v^2 = \frac{\wp}{q_V}}$$

3.2.3 Applications

Le débitmètre de Venturi

Le but de cette expérience est de mesurer le débit Q dans la canalisation de sortie à partir de la variation de hauteur dans les tubes annexes (Figure 3.8). C'est un tuyau qui se rétrécit graduellement (convergent) puis s'élargit (divergent) de façon à retrouver le diamètre précédent.

Deux piézomètres mesurent la différence de pression entre la section normale et la section de l'étranglement. Si le Venturi est horizontal et si l'on considère que la vitesse du fluide, pris comme parfait, est constante dans une section, on a alors, pour une même altitude z :

$$\frac{P_1}{\varpi} + \frac{v_1^2}{2\ g} = \frac{P_2}{\varpi} + \frac{v_2^2}{2\ g}$$

Sachant que $v_1\ S_1 = v_2\ S_2$ (d'après l'équation de continuité) et que P_1-$P_2 = \varpi \Delta H$ (d'après la loi de l'hydrostatique), on en déduit la vitesse v_2 du fluide :

$$v_2 \ = \ \sqrt{\frac{2\ g\ \Delta H}{1 - (\frac{S_2}{S_1})^2}}$$

Ainsi on peut déterminer le débit en sortie de tuyau en fonction de ΔH :

$$\boxed{Q = S_2\ v_2 = S_2\ \sqrt{\frac{2\ g\ \Delta H}{1-(\frac{S_2}{S_1})^2}} = \text{Cste}\ \sqrt{\Delta H}}$$

Le tube de Pitot

Il sert à mesurer la vitesse (et donc le débit) d'un fluide dans une canalisation (Figure 3.9).

Considérons un liquide qui se déplace dans un canal découvert à la vitesse v. Si on installe dans ce courant un tube coudé à angle droit dont l'ouverture est dirigée à l'encontre du courant, on voit le liquide monter dans le tube. La vitesse des particules de liquide arrivant en face du tube devient nulle, transformant leur énergie cinétique en énergie de pression.
La dénivellation H permet de déterminer la vitesse v : v = $\sqrt{2\ g\ H}$.
remarque : Cette expression de la vitesse est exactement identique à celle obtenue lors de l'étude d'un corps en chute libre (voir cours de mécanique classique).

Chapitre 4

Dynamique des fluides visqueux

Dans le modèle du fluide parfait, nous avons considéré que les forces de surface entre deux "couches" de fluide était uniquement normales à l'interface entre ces deux couches. Dans le cas des fluides réels, la composante tangentielle de ces forces de forces n'est plus nulle et fait intervenir la notion de viscosité.

4.1 Notion de viscosité - force de frottement

La viscosité d'un liquide se caractérise par sa résistance à la déformation (au glissement relatif de ses couches). Elle matérialise l'imperfection des fluides (surtout les liquides) puisqu'un fluide parfait serait sans rigidité (les gaz tendent vers cette perfection). Les effets de la viscosité s'observent dans les liquides en mouvement : au sein d'un liquide dont les particules ont des vitesses variables naissent des forces de frottement. Ainsi tous les fluides réels sont plus ou moins visqueux (par exemple, l'eau est moins visqueuse que l'huile)

4.2 Établissement du coefficient de viscosité

Soient 2 couches de fluides contigües et distantes de Δz (Figure 4.1).

Au cours de cet écoulement en régime laminaire, la force de frottement $\vec{F}$ qui s'exerce

à la surface de séparation de ces 2 couches s'oppose au glissement d'un couche sur l'autre. Elle est proportionnelle à la différence de vitesse des couches soit $\frac{\Delta v}{\Delta z}$ et à leur surface S.
Par définition, on pose que ce facteur de proportionnalité est le coefficient de viscosité dynamique, noté η.

$$\frac{F}{S} = \eta \frac{\Delta V}{\Delta z}$$

Le coefficient de viscosité s'exprime en Poiseuille (1 Pl = Pascal.s). On peut également trouver comme autre unité, la poise (Po) avec 1 Pl =10 Po.
remarque 1 : η ne dépend que du fluide et diminue quand la température du milieu augmente.
remarque 2 : Les frottements visqueux des fluides sont l'équivalent des frottements rugueux pour les solides.
Ordre de grandeur d'un coefficient de viscosité à 20°C et sous 1 atm :

Pour les liquides :
$\eta_{eau}^{liquide}\ (0°C) = 1.78\ 10^{-3}$ Pa.s
$\eta_{eau}^{liquide}\ (20°C) = 1.002\ 10^{-3}$ Pa.s
$\eta_{huile} = 100\ 10^{-3}$ Pa.s
Pour les gaz :
$\eta_{gaz\ H2} = 0.86\ 10^{-5}$ Pa.s
$\eta_{air} = 1.78\ 10^{-5}$ Pa.s

remarque 3 : En dynamique des fluides apparaît souvent la quantité $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ rapport du coefficient de viscosité dynamique à la masse volumique du fluide. ν est le coefficient de viscosité cinématique et a pour unité le Stockes (1 St = 10^{-4} m^2/s).

4.3 Les différents types d'écoulement - Nombre de Reynolds

Suivant la vitesse de l'écoulement d'un fluide, M. Reynolds (1883) a mis en évidence l'existence de 2 types de d'écoulement :

– l'écoulement **laminaire** (Figure 4.2) qui est un écoulement stratifié sans brassage du fluide. Les lignes de courant restent parallèles entre elles.
– l'écoulement **turbulent** (Figure 4.3), qui est un écoulement avec brassage. Dans ce cas, les lignes de courant n'ont plus de direction précise et la trajectoire des particules est souvent compliquée comme le montre la figure ci-dessous.

Le changement de régime d'un écoulement pour un fluide se produit pour une vitesse bien déterminée du courant, dite vitesse critique v_{cr}, dans le tuyau. Quelque soit le fluide utilisé, on constate qu'il existe une relation entre la vitesse critique, la viscosité cinématique et le diamètre de la canalisation :

$$v_{cr} \;=\; k\,\frac{\nu}{d}$$

Il se trouve que le coefficient k est indépendant du fluide utilisé et ce nombre, sans dimension, caractérise l'écoulement. Ce nombre, appelé **Nombre de Reynolds**, est donné par la relation :

$$\boxed{Re_{cr} \;=\; \frac{\bar{v}\;d}{\nu} \;=\; \frac{\rho\;\bar{v}\;d}{\eta}}$$

où ρ est la masse volumique du fluide, $\bar{v}$ la vitesse moyenne d'écoulement du fluide, d le diamètre de la canalisation et ν et η la viscosité cinématique et dynamique du fluide.
Les expériences montrent que $Re_{cr} \simeq 2300$ dans le cas de l'eau. On peut généraliser ce nombre de reynolds et poser que :

$$Re \;=\; \frac{\bar{v}\;d}{\nu} \;=\; \frac{\rho\;\bar{v}\;d}{\eta}$$

Ainsi 3 types d'écoulement peuvent se présenter :

1. Pour **Re** $\leq$ **2000**, l'écoulement sera de type **laminaire**,
2. Pour **2000** $<$**Re** $<$ **3000**, le régime est **transitoire**,

3. Pour **Re $\geq$ 3000**, l'écoulement sera **turbulent**. Cependant, le régime laminaire peut coexister mais dans ce cas, il est très instable et la moindre perturbation le transforme en régime tourbillonnaire.

Question : Quel est le type d'écoulement reignant dans un tuyau de diamètre 120 mm débitant 50 m^3/h ?

Rep : $\bar{v} = \frac{Q}{S}$ *=1.25 m/s d'où Re =150000* $\Rightarrow$ *le régime est turbulent*

4.4 L'équation de Bernoulli généralisée

4.4.1 Pertes de charges : régulières/singulières

Si l'on regarde la Figure 4.4, on s'aperçoit que pour un fluide parfait, la variation de hauteur Δh entre le réservoir initial et les tubes secondaires reste constante et l'équation de Bernoulli permet de relier Δh à la pression P_A et P_B, correspondant au point A et B situés sur une même horizontale. Dans le cas d'un fluide visqueux (Figure 4.5), l'écoulement s'accompagne d'une chute de pression (ou **perte de charges**) entre A et B. Comme la pression diminue tout au long de la canalisation, le fluide subit donc des pertes d'énergie qui sont essentiellement dues :

1. aux frottements sur les parois de la canalisation. On parle alors de perte de charges systématiques (ou régulières)
2. aux "accidents de parcours" (rétrécissement, élargissement ou coudes dans la canalisation). On dit qu'il s'agit de perte de charges singulières.

La difficulté dans calcul de ces pertes de charges (ou pertes de pression) est le nombre important de paramètres mis en jeu. Il faut tenir compte du type d'écoulement (laminaire ou turbulent), mais aussi des propriétés du fluide (ρ, η) et enfin des caractéristiques des canalisations (section s, longueur L, rugosité κ : lisse ou rugueux, diamètre D).

Entre 2 points séparés par une longueur l, dans un tuyau de diamètre d apparaît une perte de pression ΔP. On montre, que cette variation ΔP, est proportionnelle au carré de la vitesse dans la plupart des cas, ce qui permet d'écrire :

$$\Delta P \;=\; \xi \,\frac{\rho\,\bar{v}^2}{2} \quad ou \quad \Delta h \;=\; \xi\,\frac{\bar{v}^2}{2\;g} \;=\; \lambda\,\frac{\bar{v}^2}{2\;g}\,\frac{l}{d}$$

où ξ est le facteur de perte de charge (régulière ou singulière) de la résistance locale, $\bar{v}$ la vitesse moyenne du liquide expimée en m/s, λ est le coefficient de perte de charge (régulière ou singulière) (à ne pas confondre avec ξ), l la longueur du tuyau, d le diamètre du tuyau et Δh représente la perte de charge exprimée en mCF, mètre de colonne de fluide (souvent en mètre de colonne d'eau avec 1 atm = 10 mCE). On a ainsi la relation :

$$l \;=\; \frac{\xi}{\lambda}\,d$$

Ainsi, le calcul des pertes de charge repose entièrement sur la détermination de ces coefficients, λ et ξ, qui sont souvent des constantes caractéristiques de l'élément de l'installation. Dans d'autre cas, de nombreuses valeurs empiriques permettent d'évaluer les valeurs de ces coeficients.

A-] pertes de charges régulières

Les pertes de charges régulières sont causés par les frottements du fluide sur les parois internes des canalisations. Ces pertes se rencontrent aussi bien dans les tuyaux lisses que rugueux.

perte de charges régulières en régime laminaire

Essayons dans un premier temps de déterminer la distribution de vitesse des couches de fluide lors d'un écoulement laminaire (Figure 4.6). Puis déterminons les pertes de charges dans cette canalisation cylindrique de rayon r et de longueur l.
Faisons l'inventaire des forces subit par le fluide (on travaillera en coordonées cylindriques) :

- une force de pression, F_1 est exercée à l'entrée 1 du cylindre et $F_1 = P_1\,\pi\,r^2$,
- une force de pression, F_2 est exercée à la sortie 2 du cylindre et $F_2 = P_2\,\pi\,r^2$,
- et une force de frottement, $F_3 = 2\pi\,r\,l\,\eta\,\frac{dv}{dr}$, avec $\frac{dv}{dr}<0$.

A l'équilibre dynamique (accélération constante), on a $\sum \overrightarrow{F_i} = \vec{0}$.
On en déduit le profil des vitesses dans cette conduite cylindrique :

$$dv \; = \; - \; \frac{(P_1 \; - \; P_2)}{2 \; \eta \; l} \; r \; dr \; \Rightarrow \; v(r) \; = \; - \; \frac{(P_1 \; - \; P_2)}{4 \; \eta \; l} \; r^2 \; + \; C^{ste}$$

Pour r = a, v(r=a) = 0 $\Rightarrow$ $C^{ste} = \frac{\Delta P}{4 \; \eta \; l} \; a^2$

$$le \; profil \; des \; vitesses \; est \; donc \; v(r) \; = \; \frac{(P_1 \; - \; P_2)}{4 \; \eta \; l} \; (a^2 \; - \; r^2)$$

Conclusion : nous obtenons un profil de vitesse parabolique avec une vitesse nulle sur les bords (r = a) et une vitesse maximum au centre (v_{max} pour r = 0 soit $v_{max} = \frac{\Delta P}{4 \; \eta \; l}$ (a^2)). Or pour un profil parabolique on a : $\bar{v} = v_{max}/2$. Le débit dans la canalisation sera donc : Q = $\int \bar{v}$ dS = $\int \bar{v} \; 2 \; \pi$ r dr

question :Démontrer que $\bar{v}$ = $v_{max}/2$. Cette relation qui permet de relier le débit Q à la variation de pression au sein d'une canalisation cylindrique et pour un régime laminaire, elle constitue la loi de **Poiseuille** :

$$\boxed{Q = - \frac{\pi \; a^4}{8 \; \eta \; l} \; \Delta P \text{ ou encore } \Delta P = \frac{8 \; \eta \; l}{\pi \; a^4} \; Q = R_{hydraulique} \; Q}$$

remarque 1 : On utilise souvent la résistance hydraulique, R_{hydrau}, par analogie avec l'électricité où la relation $\Delta P = R_{hydrau}$ Q s'apparente à la loi d'ohm ΔU = R i. Dans ce cas de régime laminaire, la détermination de λ devient aisée.

remarque 2 : À partir de la relation génerale sur les pertes de charges reliant ΔP à λ, on peut montrer que le coefficient λ est uniquement fonction du nombre de Reynolds Re ; l'état de la surface n'intervient pas et donc λ ne dépend pas de κ (hauteur moyenne des aspérités), ni de la nature de la tuyauterie.

$$\lambda \; = \; \frac{64}{Re}$$

Il est immédiat de voir que Δh est proportionnel à la vitesse v et donc au débit Q_v, ainsi qu'à la viscosité cinématique.

perte de charges régulières - régime turbulent

On montre, que la variation ΔP, est toujours proportionnelle au carré de la vitesse et donc au carré du débit Q. On a :

$$\Delta P \;=\; \xi\,\frac{\rho\,\bar{v}^2}{2} \;=\; \xi\,\frac{\rho\,Q^2}{2\,S^2}$$

Dans ce cas, les phénomènes d'écoulement sont beaucoup plus complexes et la détermination du coefficient de perte de charge résulte souvent de mesures expérimentales. Cette approche empirique, explique la diversité des formules utilisées pour sa détermination.
En régime turbulent, l'état de la surface devient sensible et son influence est d'autant plus grande que le nombre de Reynolds est grand. Tous les travaux ont montré l'influence de la rugosité et on s'est attaché par la suite à chercher la variation du coefficient λ en fonction du nombre de Reynolds Re et de la rugosité κ du tuyau.
La formule de Colebrook est actuellement considérée comme celle qui traduit le mieux les phénomènes d'écoulement en régime turbulent. Elle est représentée sous la forme suivante :

$$\frac{1}{\lambda} \;=\; -2\;log\;(\;\frac{\kappa}{3.7\;d} \;+\; \frac{2.51}{Re\;\sqrt{\lambda}})$$

Pour simplifier la relation précédente, on peut chercher à savoir si l'écoulement est hydrauliquement lisse ou rugueux pour évaluer la prédominence des deux termes de la parenthèse dans cette relation. En pratique, on utilise le plus souvent des représentations graphiques, ou des abaques, ou encore des tableaux de valeurs ou on fait souvent appel à des formules empiriques plus simples, valables pour des cas particuliers et dans certains domaines de validité du nombre de Reynolds.
Par exemple :

– si **l'écoulement est turbulent lisse et 3000<Re<10^5**, on utilisera plutôt la formule de Blasius

$$\lambda \;=\; \frac{0.3164}{Re^{1/4}} \qquad soit \quad \Delta h \;=\; C^{ste}\;\frac{v^{1.75}}{d^{5/4}}\;l$$

  Dans ce cas, les pertes de charges sont presque proportionnelles au carré de la vitesse.

– si **l'écoulement est turbulent rugueux et Re>10^5**, on utilise la relation de

Karman-Prandlt

$$\lambda \;=\; \frac{1}{[log\ 13.8\ (\frac{d}{\kappa})^2]^2}$$

remarque : généralement pour les écoulements d'eau dans les canalisations, le régime est turbulent lisse c'est-à-dire que la relation nécessaire est celle de Blasius.

Un inventaire (Figure 4.7) des relations empiriques permettant de caractériser ces pertes de charge est présenté dans le tableau ci-après. Cette liste est loin d'être exhaustive mais elle nous permettra d'appréhender tous les problèmes classiques rencontrés dans une exploitation agricole.

B-] pertes de charges singulières

Les pertes de charges dans une canalisation comprennent, en plus des pertes de charges linéaires, telles que nous les avons définies précédemment, toutes les résistances à l'écoulement dues aux "accidents de parcours".
On appelle pertes de charge locale ou singulière, le résultat sur la pression, de toute déformation de la veine de fluide, en direction et en section. La valeur de cette perte de charge singulière est généralement obtenue par des méthodes expérimentales.
Il y a généralement 2 méthodes pour caractériser les pertes de charges locales :

1. **Méthode directe** : La perte de charge est exprimée sous la forme

   $$\Delta h \;=\; \xi\ \frac{v^2}{2\ g} \;=\; \lambda\ \frac{v^2}{2\ g}\ \frac{l}{d} \quad ou \quad \Delta P \;=\; \xi\ \frac{\rho\ v^2}{2}$$

   où ξ est cette foic-ci le facteur de perte de charge singulière de la résistance locale et λ est le coefficient de perte de charge singulière. On a ainsi la relation :

   $$l \;=\; \frac{\xi}{\lambda}\ d$$

   D'une manière générale, pour les appareils de robinetterie (en particulier les vannes, les robinets, les soupapes, les filtres, les séparateurs..) les constructeurs fournissent la valeur du facteur ξ de perte de charge singulière pour chaque élément.

Par exemple : si un coude a une perte de charge ξ_1 et un robinet a une perte de charge ξ_2 alors une canalisation longue de 10 m contenant 2 coudes et un robinet présentera une perte de charge totale de : $\Delta h = \Delta h_{10} + \xi_1 \frac{v_1^2}{2\ g} + \xi_2 \frac{v_2^2}{2\ g}$. Comme le montre la Figure 4.8, des formules empiriques permettent d'évaluer directement la valeur de ces coefficients ξ et λ.

2. **Méthode équivalente** : Chaque accesoire de tuyauterie est remplacé par une longueur équivalente de tuyau rectiligne de même diamètre dont la perte de charge est égale à celle de cet accessoire pour le même débit. Ces longueurs de droites sont ensuite ajoutées à la longueur réelle de la tuyauterie : on obtient ainsi une longueur totale fictive à laquelle on applique la théorie générale des pertes de charges linéaires.

   Par exemple : un coude correspond à x m de tuyau et un robinet correspond à y m de tuyau. Une canalisation de 10 m de long comportant 2 coudes et un robinet présente la même perte de charge qu'une canalisation rectiligne de longueur $(10 + 2x + y)$ m.

   Question : Sur la Figure 4.9 on voit que le circuit d'extraction est constitué de 4 coudes (à 90^0 à brides) et la longueur du conduit (de Diamètre Nominal = 40 mm), entre les points 1 et 2 est de L =26 m. Déterminer dans un premier temps les pertes de charges singulières (c'est-à-dire l'équivalent en longueur de droite de tuyau) en vous appuyant sur l'annexe 1. Puis en déduire la perte de charge linéaire correspondant à une telle longueur de tuyauterie en vous appuyant sur l'annexe 2.

   Rep : perte de charges singulières = 2.55 m et perte de charges régulières =27.12 m

4.4.2 Généralisation de l'équation de Bernoulli

Il faut maintenant introduire ces termes de pertes de charges, qui correspondent à une chute de pression ΔP au cours de l'écoulement (ou chute de hauteur Δh dans un tube piezométrique), dans l'équation de Bernoulli. Ainsi pour un fluide ne traverssant aucune machine hydraulique, on aura :

$$P_1 \; + \; \rho \; g \; z_1 \; + \; \frac{1}{2} \, \rho \, v_1^2 \; = \; P_2 \; + \; \rho \; g \; z_2 \; + \; \frac{1}{2} \, \rho \, v_2^2 \; + \; \Delta P$$

soit encore

$$(P_2 \; - \; P_1) \; + \; \rho \; g \; (z_2 - z_1) \; + \; \frac{1}{2} \, \rho \, (v_2^2 \; - \; v_1^2) \; = \; - \, \Delta P$$

Souvent, on exprime les pertes de charges en hauteur de colonne d'eau. On obtient ainsi :

$$\frac{(P_2 \; - \; P_1)}{\varpi} \; + \; (z_2 - z_1) \; + \; \frac{1}{2 \; g} \; (v_2^2 \; - \; v_1^2) \; = \; - \, \Delta h$$

ANNEXE : mouvement d'un objet dans un fluide

Cette section aborde le mouvement d'un objet dans un fluide. Cette étude sert notamment pour des applications environnementales pour l'utilisation de techniques telles que la décantation, la centrifugation. On retrouve également cette étude dans le traitement des eaux (stations d'épuration). Souvent, ces techniques visent à séparer une suspension (ou une émulsion) en ces deux phases (solide et liquide) et c'est la sédimentation (ou vitesse de sédimentation) qui va jouer un rôle crucial de séparation ou non de la suspension.

On peut se placer d'un point de vue mécanique classique et étudier le mouvement d'une particule (de masse volumique ρ_1, de volume V) dans un fluide (de masse volumique ρ_{fluide}). Cette particule est soumise à 3 forces : $\vec{P}$ son poids, la poussée d'archimède (qui est négligeable si on est dans l'air) et à une force de frottement $\vec{F}$ qui s'oppose au mouvement de la particule.

Suivant le type d'écoulement cette dernière force peut prendre différente valeur d'après la loi de stockes :

- pour un écoulement laminaire et Re < 2, $\vec{F}$ = - 6 π r η $\vec{v}$
- pour un régime turbulent et Re > 500 alors $\vec{F}$ est proportionnelle à v^2 $\vec{u_x}$
- dans les autres cas, on utilise des formules empiriques ou des abaques.

Plaçons nous dans le cas d'un régime laminaire, et déterminons la vitesse limite que peut prendre cette particule en mouvement dans le fluide.
L'écriture du principe fondamental de la dynamique donne :

$$(\rho_{fluide} - \rho_1)\ V\ g\ +\ 6\ \pi\ r\ \eta\ v\ =\ \rho_1\ V\ g\ a$$

où a représente l'accélération de la particule. La vitesse limite, v_{lim}, est atteinte lorsque a $= \frac{dv}{dt} = 0$. Ainsi on en déduit :

$$v_{lim}\ =\ \frac{\rho_1 - \rho_{fluide}}{6\ \pi\ r\ \eta}\ V\ g$$

$$v_{lim}\ =\ \frac{1}{18\ \eta}\ (\rho_1 - \rho_{fluide})\ g\ d^2$$

Dans le cas d'une décantation, sédimantation par simple gravité, cette vitesse limite n'est autre que la vitesse de sédimentation.

remarque : Il faut vérifier, au sein d'un décanteur (vertical ou horizontal),que vérifier que la particule soit retenue avant qu'elle en sorte ; il faut vérifier que la condition suivante soit respectée : $v_{sédimentation} > v_{écoulement} = Q\ S$ où Q est le débit volumique de fluide dans le décanteur et S la surface d'écoulement.